MÉTODO DE DETERMINANTES

Es una notación matemática formada por una tabla cuadrada de números y está formada por una Matriz Cuadrada.

El orden de una determinante cuadrada es el número de elementos de cada fila o columna, por ejemplo:

$$\begin{matrix} a1 & b1 \\ a2 & b2 \end{matrix}$$

Determinante de segundo orden

$$\begin{matrix} a1 & b1 & c1 \\ a2 & b2 & c2 \\ a3 & b3 & c3 \end{matrix}$$

Determinante de tercer orden

$$\begin{matrix} a1 & b1 \\ a2 & b2 \end{matrix}$$

Diagonal principal ($\searrow$) a1, b2
Diagonal secundaria ($\swarrow$) b1, a2
Solución del determinante: diagonal principal – diagonal secundaria

$$(a1 \times b2) - (b1 \times a2)$$

Ejemplo 1

$$V = \begin{matrix} 6 & -4 \\ 3 & -5 \end{matrix} \therefore V = (6 \times [-5]) - ([-4] \times 3) \therefore V = (-30) - (-12) \therefore V = -30 + 12$$

$$V = -18$$

Ejemplo 2

Para la solución de un determinante de tercer orden se utiliza la regla de Sarrus, donde se repiten las 2 primeras filas de la matriz debajo de la tercera.

$$I = \begin{matrix} 4 & -2 & 1 \\ 0 & 5 & -3 \\ 2 & 6 & 1 \end{matrix}$$

$$\begin{matrix} 4 & -2 & 1 \\ 0 & 5 & -3 \\ 2 & 6 & 1 \\ 4 & -2 & 1 \\ 0 & 5 & -3 \end{matrix}$$

$$I=\{(4\times 5\times 1)+(0\times 6\times 1)+(2\times[-2]\times[-3])\}$$
$$-\{(1\times 5\times 2)+([-3]\times 6\times 4)+(1\times[-2]\times 0)\}$$

$$I=\{(20)+(0)+(12)\}-\{(10)+(-72)+(0)\}\therefore I=32+62\therefore I=94$$

SOLUCIÓN DE ECUACIONES SIMULTÁNEAS

Para resolver un sistema de dos o tres ecuaciones se utiliza la regla de Cramer en los determinantes y se enuncia así:

En la solución de un sistema de ecuaciones el valor de cada incógnita es una fracción cuyo denominador es el determinante del sistema formado por los coeficientes de las incógnitas y cuyo numerador es el determinante que se obtiene sustituyendo en el determinante del sistema los coeficientes de dicha incógnita por los términos independientes de las ecuaciones.

Ejemplo 3

Ecuaciones:

$2I1+I2=23$

$3I1-2I2=3$

$$D=\begin{matrix}2 & 1\\ 3 & -2\end{matrix}\therefore D=-4-3\therefore D=-7$$

$$I1=\frac{\begin{matrix}23 & 1\\ 3 & -2\end{matrix}}{D}\therefore I1=\frac{-46-3}{-7}\therefore I1=7$$

$$I2=\frac{\begin{matrix}2 & 23\\ 3 & 3\end{matrix}}{D}\therefore I2=\frac{6-69}{-7}\therefore I2=9$$

Ejemplo 4

Ecuaciones:

$3I1+2I2+I3=7$

$I1+3I2-I3=12$

$2I1+I2+3I3=-1$

$$D=\begin{matrix}3 & 2 & 1\\ 1 & 3 & -1\\ 2 & 1 & 3\\ 3 & 2 & 1\\ 1 & 3 & -1\end{matrix}\therefore D=15$$

$$I1 = \frac{\begin{array}{ccc} 7 & 2 & 1 \\ 12 & 3 & -1 \\ -1 & 1 & 3 \\ 7 & 2 & 1 \\ 12 & 3 & -1 \end{array}}{D} \therefore I1 = \frac{15}{15} \therefore I1 = 1$$

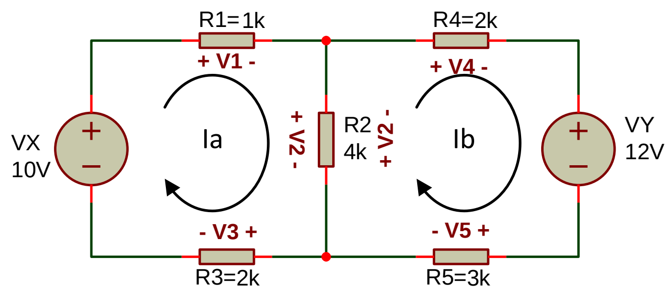
$$I2 = \frac{\begin{array}{ccc} 3 & 7 & 1 \\ 1 & 12 & -1 \\ 2 & -1 & 3 \\ 3 & 7 & 1 \\ 1 & 12 & -1 \end{array}}{D} \therefore I2 = \frac{45}{15} \therefore I2 = 3$$

$$I3 = \frac{\begin{array}{ccc} 3 & 2 & 7 \\ 1 & 3 & 12 \\ 2 & 1 & -1 \\ 3 & 2 & 7 \\ 1 & 3 & 12 \end{array}}{D} \therefore I3 = \frac{-30}{15} \therefore I3 = -2$$

SOLUCIÓN DE CIRCUITOS POR DETERMINANTES

Ejemplo 5

Asignamos las corrientes en las mallas A y B en el sentido de las manecillas del reloj.



Aplicamos ley de Kirchhoff de voltaje en cada malla:

Malla A:
$Vx = V1 + V2 + V3$
Aplicando la ley de ohm (V=IR)
$10 = R1 \times Ia + R2(Ia - Ib) + R3 \times Ia$
$10 = Ia + 4(Ia - Ib) + 2Ia \therefore 10 = Ia + 4Ia - 4Ib + 2Ia$
$10 = 7Ia - 4Ib \ \rightarrow \text{Ecuación 1}$

$0 = V2 + V4 + Vy + V5$

Aplicando la ley de ohm (V=IR)

$0 = R2(Ib - Ia) + R4 \times Ib + Vy + R5 \times Ib$

$0 = 4(Ib - Ia) + 2Ib + Vy + 3Ib \therefore 0 = 4Ib - 4Ia + 2Ib + 12 + 3Ib$

$-12 = -4Ia + 9Ib \rightarrow \text{Ecuación 2}$

$$D = \begin{matrix} 7 & -4 \\ -4 & 9 \end{matrix} \therefore D = 63 - 16 \therefore D = 47$$

$$Ia = \frac{\begin{matrix} 10 & -4 \\ -12 & 9 \end{matrix}}{D} \therefore Ia = \frac{90 - 48}{47} \therefore Ia = \frac{42}{47} \therefore Ia = 0{,}89mA = I1 = I3$$

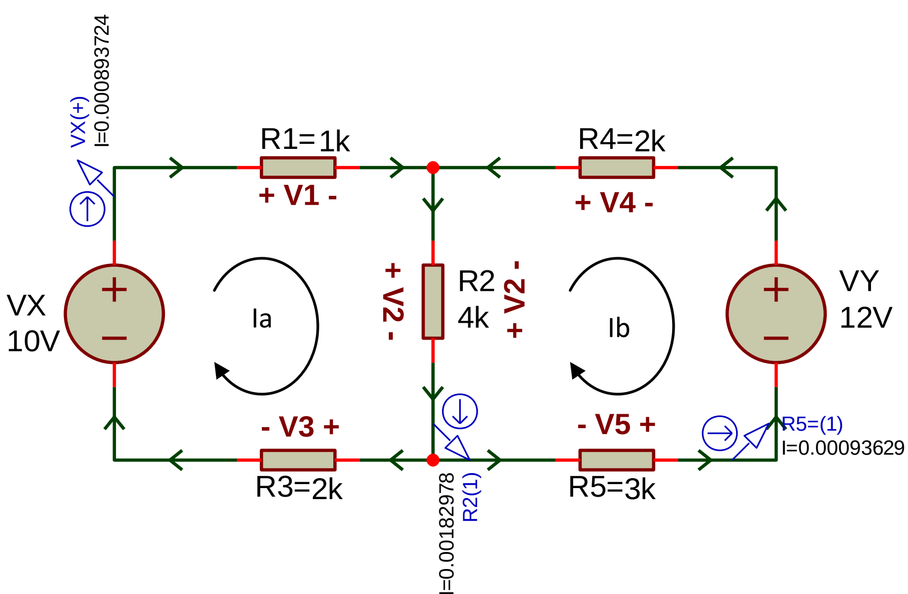
$$Ib = \frac{\begin{matrix} 7 & 10 \\ -4 & -12 \end{matrix}}{D} \therefore Ib = \frac{-84 + 40}{47} \therefore Ib = \frac{-44}{47} \therefore Ib = -0{,}93mA = I4 = I5$$

Como el resultado de Ib dio un valor negativo, significa que realmente la dirección es contraria a la asignada.

La asignación de las corrientes Ia e Ib tienen direcciones contrarias cuando pasan por R2, entonces se sustrae del valor mayor el valor menor y la dirección de la corriente es la del mayor valor.

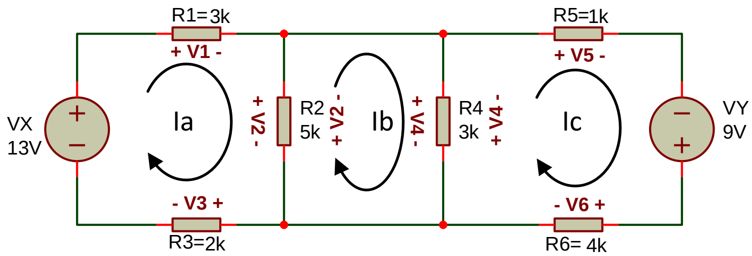
$$I2 = Ia - Ib \therefore I2 = 0{,}89mA - (-0{,}93mA) \therefore I2 = 1{,}82mA$$

Como el resultado de la corriente I2 es positiva, la dirección es la asignada a la corriente Ia.



Ejemplo 6

Asignamos las corrientes en las mallas A, B y C en el sentido de las manecillas del reloj.



Aplicamos ley de Kirchhoff de voltaje en cada malla:

Malla A:
$Vx = V1 + V2 + V3$
Aplicando la ley de ohm (V=IR)
$13 = R1 \times Ia + R2(Ia - Ib) + R3 \times Ia$
$13 = 3Ia + 5(Ia - Ib) + 2Ia \therefore 13 = 3Ia + 5Ia - 5Ib + 2Ia$
$13 = 10Ia - 5Ib \ \rightarrow \text{Ecuación 1}$

Malla B:
$0 = V2 + V4$
Aplicando la ley de ohm (V=IR)
$0 = R2(Ib - Ia) + R4(Ib - Ic)$
$0 = 5Ib - 5Ia + 3Ib - 3Ic \therefore 0 = -5Ia + 8Ib - 3Ic$
$0 = -5Ia + 8Ib - 3Ic \rightarrow \text{Ecuación 2}$

Malla C:
$Vy = V4 + V5 + V6$
Aplicando la ley de ohm (V=IR)
$9 = R4(Ic - Ib) + R5 \times Ic + R6 \times Ic$
$9 = 3Ic - 3Ib + Ic + 4Ic \therefore 9 = -3Ib + 8Ic$
$9 = -3Ib + 8Ic \ \rightarrow \text{Ecuación 3}$

$$D = \begin{matrix} 10 & -5 & 0 \\ -5 & 8 & -3 \\ 0 & -3 & 8 \\ 10 & -5 & 0 \\ -5 & 8 & -3 \end{matrix} \therefore D = (640 + 0 + 0) - (0 + 90 + 200) \therefore D = 640 - 290$$

$$D = 350$$

$$Ia = \frac{\begin{matrix} 13 & -5 & 0 \\ 0 & 8 & -3 \\ 9 & -3 & 8 \\ 13 & -5 & 0 \\ 0 & 8 & -3 \end{matrix}}{D} \therefore Ia = \frac{(832 + 0 + 135) - (0 + 117 + 0)}{350}$$

$$Ia = \frac{967 - 117}{350} \therefore Ia = 2{,}42mA = I1 = I3$$

$$Ib = \frac{\begin{matrix} 10 & 13 & 0 \\ -5 & 0 & -3 \\ 0 & 9 & 8 \\ 10 & 13 & 0 \\ -5 & 0 & -3 \end{matrix}}{D} \therefore Ib = \frac{(0 + 0 + 0) - (0 - 270 - 520)}{350}$$

$$Ib = \frac{0 + 790}{350} \therefore Ib = 2{,}25mA$$

$$Ic = \frac{\begin{matrix} 10 & -5 & 13 \\ -5 & 8 & 0 \\ 0 & -3 & 9 \\ 10 & -5 & 13 \\ -5 & 8 & 0 \end{matrix}}{D} \therefore Ic = \frac{(720 + 195 + 0) - (0 + 0 + 225)}{350}$$

$$Ic = \frac{915 - 225}{350} \therefore Ic = 1{,}97mA = I5 = I6$$

La corriente que circula por R2 es la corriente Ia menos la corriente Ib y con la dirección de la corriente Ia.

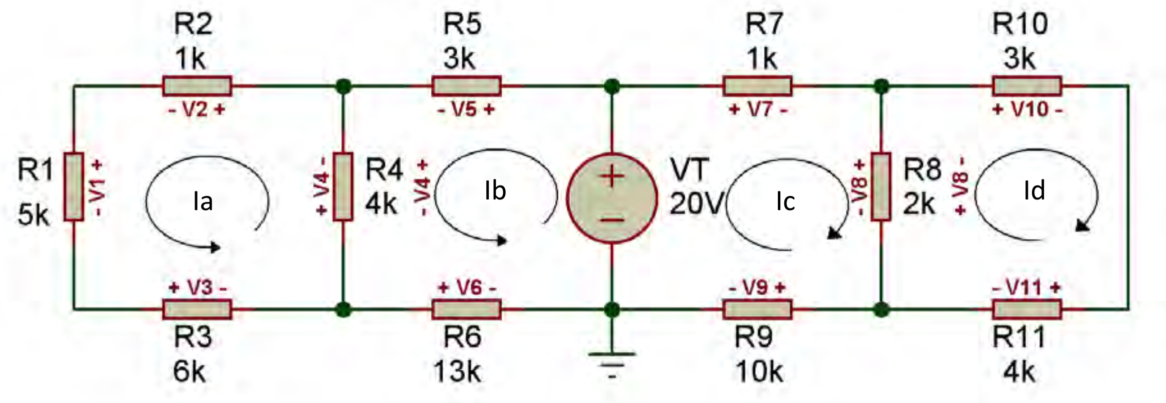
$$I2 = Ia - Ib \therefore I2 = 2{,}42mA - 2{,}25mA \therefore I2 = 0{,}17mA$$

La corriente que circula por R4 es la corriente Ib – la corriente Ic y con la dirección de la corriente Ib.

$$I4 = Ib - Ic \therefore I4 = 2{,}25mA - 1{,}97mA \therefore I4 = 0{,}28mA$$

Ejemplo 7

Asignamos las corrientes en las mallas A, B, C y D en el sentido de las manecillas del reloj.



Aplicamos ley de Kirchhoff de voltaje en cada malla:

Malla A:
$0 = V2 + V1 + V3 + V4$
Aplicando la ley de ohm (V=IR)
$0 = R2 \times Ia + R1 \times Ia + R3 \times Ia + R4(Ia - Ib)$
$0 = Ia + 5Ia + 6Ia + 4Ia - 4Ib$
$0 = 16Ia - 4Ib \;\rightarrow \text{Ecuación } 1$

Malla B:
$VT = V5 + V4 + V6$
Aplicando la ley de ohm (V=IR)
$VT = Ib \times R5 + R4(Ib - Ia) + R6 \times Ib$
$20 = 3Ib + 4Ib - 4Ia + 13Ib$
$0 = -4Ia + 20Ib \rightarrow \text{Ecuación } 2$

Malla C:
$VT = V7 + V8 + V9$
Aplicando la ley de ohm (V=IR)
$20 = R7 \times Ic + R8(Ic - Id) + R9 \times Ic$
$20 = Ic + 2Ic - 2Id + 10Ic$
$20 = 13Ic - 2Id \;\rightarrow \text{Ecuación } 3$

Malla D:
$0 = V10 + V11 + V8$
Aplicando la ley de ohm (V=IR)
$0 = R10 \times Id + R11 \times Id + R8(Id - Ic)$
$0 = 3Id + 4Id + 2Id - 2Ic$
$0 = -2Ic + 9Id \;\rightarrow \text{Ecuación } 4$

Para calcular el determinante de una matriz 4x4 (o superior) se debe tener en cuenta lo siguiente:

- Elegir la fila o la columna que tenga mayor cantidad de ceros.
- En caso de no haber, elija la fila o la columna que tenga el valor más grande.

Solucionamos primero el denominador (D) del determinante ya que será el denominador común para la solución de todos los determinantes de las variables de la Corriente Eléctrica (Ia, Ib, Ic e Id).

El método de solución se llama por cofactores y en este ejemplo elegimos la columna 1:

$$D = \begin{array}{c} \begin{matrix} Ia & Ib & Ic & Id \end{matrix} \\ \begin{vmatrix} 16 & -4 & 0 & 0 \\ -4 & 20 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 13 & -2 \\ 0 & 0 & -2 & 9 \end{vmatrix} \end{array} \qquad \begin{vmatrix} + & - & + & - \\ - & + & - & + \\ + & - & + & - \\ - & + & - & + \end{vmatrix}$$

El método de solución se llama por cofactores y elegimos la columna 1 y el primer signo es el perteneciente a la posición del cofactor:

$$D = +(16) \times \begin{vmatrix} 20 & 0 & 0 \\ 0 & 13 & -2 \\ 0 & -2 & 9 \\ 20 & 0 & 0 \\ 0 & 13 & -2 \end{vmatrix} - (-4) \times \begin{vmatrix} -4 & 0 & 0 \\ 0 & 13 & -2 \\ 0 & -2 & 9 \\ -4 & 0 & 0 \\ 0 & 13 & -2 \end{vmatrix} + (0) \times |0| - (0) \times |0|$$

$$D = 16[(2340) - (80)] + 4[(-468) - (-16)] \therefore D = 36160 - 1808 \therefore D = 34352$$

Hallamos Ia:

$$Ia = \frac{\begin{matrix} Kte & Ib & Ic & Id \\ 0 & -4 & 0 & 0 \\ 20 & 20 & 0 & 0 \\ 20 & 0 & 13 & -2 \\ 0 & 0 & -2 & 9 \end{matrix}}{34352} \rightarrow Elegida\ la\ columna\ 1$$

$$Ia = (0) \times |0| - (20) \times \begin{vmatrix} -4 & 0 & 0 \\ 0 & 13 & -2 \\ 0 & -2 & 9 \\ -4 & 0 & 0 \\ 0 & 13 & -2 \end{vmatrix} + (20) \times \begin{vmatrix} -4 & 0 & 0 \\ 20 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 9 \\ -4 & 0 & 0 \\ 20 & 0 & 0 \end{vmatrix} - (0) \times |0|$$

$$Ia = \frac{-20[(-468)-(-16)]+20[(0)-(0)]}{34352} \therefore Ia = \frac{9040}{34352} \therefore Ia = 0{,}263mA$$

Hallamos Ib:

$$Ib = \frac{\begin{matrix} Ia & Kte & Ic & Id \\ 16 & 0 & 0 & 0 \\ -4 & 20 & 0 & 0 \\ 0 & 20 & 13 & -2 \\ 0 & 0 & -2 & 9 \end{matrix}}{34352} \rightarrow Elegida\ la\ columna\ 2$$

$$Ib = -(0)\times|0| + (20)\times\begin{vmatrix} 16 & 0 & 0 \\ 0 & 13 & -2 \\ 0 & -2 & 9 \\ 16 & 0 & 0 \\ 0 & 13 & -2 \end{vmatrix} - (20)\times\begin{vmatrix} 16 & 0 & 0 \\ -4 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 9 \\ 16 & 0 & 0 \\ -4 & 0 & 0 \end{vmatrix} + (0)\times|0|$$

$$Ib = \frac{20[(1872)-(64)]-20[(0)-(0)]}{34352} \therefore Ib = \frac{36160}{34352} \therefore Ib = 1{,}052mA$$

Hallamos Ic:

$$Ic = \frac{\begin{matrix} Ia & Ib & Kte & Id \\ 16 & -4 & 0 & 0 \\ -4 & 20 & 20 & 0 \\ 0 & 0 & 20 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 9 \end{matrix}}{34352} \rightarrow Elegida\ la\ columna\ 3$$

$$Ic = +(0)\times|0| - (20)\times\begin{vmatrix} 16 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 9 \\ 16 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{vmatrix} + (20)\times\begin{vmatrix} 16 & -4 & 0 \\ -4 & 20 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \\ 16 & -4 & 0 \\ -4 & 20 & 0 \end{vmatrix} - (0)\times|0|$$

$$Ic = \frac{-20[(0)-(0)]+20[(2880)-(144)]}{34352} \therefore Ic = \frac{54720}{34352} \therefore Ic = 1{,}592mA$$

Hallamos Id:

$$Id = \frac{\begin{matrix} Ia & Ib & Ic & Kte \\ 16 & -4 & 0 & 0 \\ -4 & 20 & 0 & 20 \\ 0 & 0 & 13 & 20 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \end{matrix}}{34352} \rightarrow Elegida\ la\ columna\ 4$$

$$Id = -(0) \times |0| + (20) \times \begin{vmatrix} 16 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 13 \\ 0 & 0 & -2 \\ 16 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 13 \end{vmatrix} - (20) \times \begin{vmatrix} 16 & -4 & 0 \\ -4 & 20 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \\ 16 & -4 & 0 \\ -4 & 20 & 0 \end{vmatrix} + (0) \times |0|$$

$$Id = \frac{20[(0)-(0)] - 20[(-640)-(-32)]}{34352} \therefore Id = \frac{12160}{34352} \therefore Id = 0{,}353mA$$

Ahora, se analiza cada malla y por propiedades de los circuitos la corriente en un circuito serie es la misma; para las resistencias que comparten dos mallas se debe restar del valor mayor el menor.

Ia = I1 = I2 = I3 = 0,263mA (por estar en serie)

Ib e Ia comparten la R4, entonces de la mayor se resta la menor y esa será la corriente que pasa por R4 y con la dirección de la mayor, entonces:
I4 = Ib – Ia ∴ I4 = 0,789mA

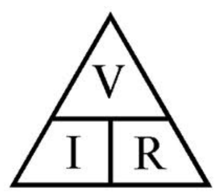
Ib = I5 = I6 = 1,052mA (por estar en serie)

Ic = I7 = I9 = 1,592mA (por estar en serie)

Ic e Id comparten la R8, entonces de la mayor se resta la menor y esa será la corriente que pasa por R8 y con la dirección de la mayor, entonces:
I8 = Ic – Id ∴ I8 = 1,239mA

Id = I10 = I11 = 0,353mA (por estar en serie)

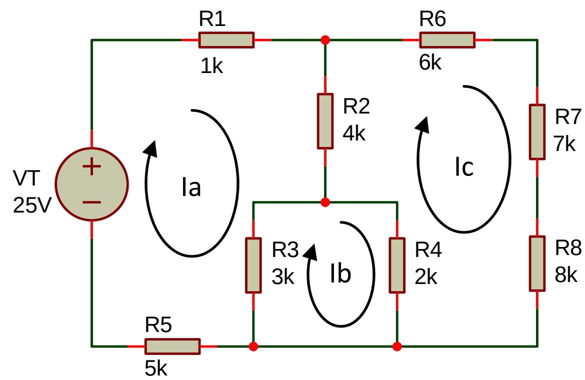
Por ley de ohm: V = I x R



V1 = I1 x R1 ∴ V1 = 1,315v
V2= I2 x R2 ∴ V2 = 0,263v
V3= I3x R3 ∴ V3= 1,578v
V4 = I4 x R4 ∴ V4 = 3,156v
V5 = I5 x R5 ∴ V5 = 3,156v
V6 = I6 x R6 ∴ V6 = 13,676v
V7 = I7 x R7 ∴ V7 = 1,592v
V8 = I8 x R8 ∴ V8 = 2,478v
V9 = I9 x R9 ∴ V9 = 15,92v
V10 = I10 x R10 ∴ V10 = 1,059v
V11 = I11 x R11 ∴ V11 = 1,412v

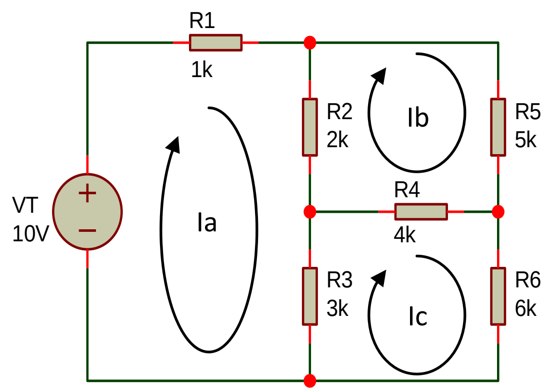
EJEMPLOS PROPUESTOS

1) ¿Halle Ia, Ib, Ic, V1, V2, V3, V4, V8?



Respuestas:
Ia = 2,53mA; Ib = 2,32mA; Ic = 1,46mA, V1 = 2,53v; V2 = 4,28v; V3 = 0,63v; V4 = 1,72v; V8 = 11,68v

2) ¿Halle Ia, Ib, Ic, V2, V3, V4?



Respuestas:
Ia = 2,25mA; Ib = 0,675mA; Ic = 0,728mA; V2 = 3,15v; V3 = 4,56v; V4 = 0,212v